ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

CONCOURS D'ADMISSION SESSION DE 1988 **Voie Générale**

MATHÉMATIQUES 1ÈRE ÉPREUVE DURÉE 4 H - COEFFICIENT 4

PROBLÈME I : On considère E l'espace vectoriel réel des fonctions numériques de la variable réelle et on désigne par E_1 le sous-ensemble de E dont les éléments sont les fonctions f, définies et continues sur $\mathbb{R}$, telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{x} e^t f(t)\,dt$ soit convergente pour tout x réel.

1°) Montrer que E_1 définit un sous-espace vectoriel de E.

2°) On considère l'application u de E_1 dans E qui à toute fonction f de E_1 fait correspondre une fonction F_f définie par :

$$e^x F_f(x) = \int_{-\infty}^{x} e^t f(t)\,dt \quad \text{pour tout } x \text{ réel.}$$

Montrer que u est une application linéaire. Est-elle injective ?

3°) Montrer que toute fonction F_f ainsi définie est dérivable. Déterminer alors une relation entre la dérivée F'_f et les fonctions F_f et f.

4°) Si une fonction f de E_1 est bornée et continûment dérivable, montrer que sa dérivée f' appartient à E_1 et que $u(f') = (u(f))'$ c'est-à-dire : $F_{f'} = F'_f$.

5°) Quelles sont les fonctions f de E_1 satisfaisant à :
$u(f) = F_f = a.f$ où a est un paramètre réel strictement positif ?

6°) On considère E_2 l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n (n est un entier naturel donné).
Montrer les inclusions : $E_2 \subset E_1$ et $u(E_2) \subset E_2$.
On désigne par v la restriction de l'application u à l'ensemble E_2.
Écrire la matrice de cette application ; la base de E_2 étant l'ensemble des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ telles que :
$\varphi_1(x) = x^n, \varphi_2(x) = x^{n-1}, \ldots, \varphi_n(x) = x, \varphi_{n+1}(x) = 1.$
Montrer que $v(E_2) = E_2$.
Calculer les valeurs propres de cette matrice ; les fonctions propres correspondantes.

PROBLÈME II : Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

On désigne par f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ pour tout entier naturel non nul n par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \geqslant -n \\ f_n(x) = 0 & \text{si } x < -n \end{cases}$$

1°) Étudier et représenter sur un même graphique les fonctions f_1, f_2, f_3.

2°) Étudier la continuité de f_n sur $\mathbb{R}$ pour tout entier naturel non nul n.

3°) Déterminer pour tout réel x, $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

4°) Plus généralement, on considère une suite réelle (a_n) telle que : $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$

Démontrer que $\lim_{n \to \infty} \left(e^{-a_n}\left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n\right) = 1$

T.S.V.P.

5°) On définit la fonction H_x par : $H_x(t) = \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t$ $x \neq 0$ fixé pour $t>0$ et dans le cas $x<0$ pour $t>-x$.

a) Montrer que la dérivée $H_x'(t)$ peut s'écrire : $H_x'(t) = H_x(t).G\left(\frac{x}{t}\right)$, avec $G\left(\frac{x}{t}\right) = \ell n\left(1 + \frac{x}{t}\right) - \frac{\frac{x}{t}}{1 + \frac{x}{t}}$

b) Étudier le signe de la fonction $G(u)$ lorsque $u \in]-1, +\infty[$.

c) En déduire les tableaux de variation de $H_x(t)$ selon le signe de x.

6°) En déduire que pour tout entier naturel non nul n et tout réel x on a : $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$

7°) Pour tout entier naturel non nul n démontrer que : $x \neq 0$ tel que $x \geqslant -n$ $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x$

$x \neq 0$ tel que $x \leqslant n$ $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n < e^{-x}$

Partie II

On pose $I_n = \int_0^{n^2} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n dx$ et $J_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^{-n} dx$

1°) Pour quelles valeurs de n, l'intégrale J_n converge-t-elle ?

2°) Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ converge.

3°) En admettant le résultat de la question I 7°), démontrer que : $I_n \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx \leqslant J_n$.

4°) En effectuant les changements de variable respectifs $X = 1 - \frac{\sqrt{x}}{n}$ et $Y = 1 + \frac{\sqrt{x}}{n}$, calculer I_n et J_n.

5°) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$.

6°) a) Calculer directement $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ au moyen d'un changement de variable.

b) Plus généralement calculer directement $\int_0^{+\infty} \exp\left(-x^{\frac{1}{k}}\right) dx$, pour k entier naturel non nul, par un procédé analogue.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail